

# VITSMUNALEG ÁSKORUN Í STÆRÐFRÆÐI-KENNSLU Á UNGLINGASTIGI

Markmið þessarar myndbandsrannsóknar var að meta vitsmunalega áskorun í stærðfræðikennslu á unglingastigi. Alls voru 34 kennslustundir í stærðfræði í 8. bekk í 10 skólum teknar upp og greindar ásamt 144 viðfangsefnum sem lögð voru fyrir. Greining gagna leiddi í ljós að meirihluti viðfangsefna fól í sér að beita tilteknum reikniaðferðum við úrlausn þeirra. Jafnframt virtist kennurum reynast vandamt að viðhalda kröfum um rökhugsun í kennslustundum. Þegar nemendur unnu hver fyrir sig eftir áætlun var algengt að í aðstoð við þá drægju kennarar úr áskorun viðfangsefna með því að spyrja eingöngu lokaðra spurninga, reikna fyrir nemendur eða segja þeim svarið. Niðurstöður sýndu þó einnig dæmi þess að við lausn viðfangsefna þyrfti að beita gagnrýninni og skapandi hugsun og kennarar hvettu til samvinnu og samtals. Í þeim tilvikum, þar sem vitsmunaleg áskorun var á háu stigi, unnu nemendur í sameiningu að viðfangsefnum.

Efnisorð: stærðfræðimenntun, vitsmunaleg áskorun, gæði kennslu, myndbandsrannsóknir, greinandi hugsun

## INNGANGUR

Árangur nemenda er að miklu leyti háður því að kennarar búi þeim námsumhverfi þar sem rík tækifæri gefast til að kljást við viðfangsefni sem henta vitsmunalegum þroska þeirra og veita hæfilega áskorun. Með því að leggja til viðfangsefni þar sem nemendur þurfa að beita greinandi hugsun og koma hugsunum sínum í orð við aðra má virkja þá til þess að þróa með sér nýja og aukna hæfni (Vygotsky, 1978). Samkvæmt aðalnámsskrá grunnskóla er gert ráð fyrir að nemendur öðlist hæfni til að útskýra hugsun sína og noti gagnrýna og greinandi hugsun í stærðfræði (mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2013). Þessar kröfur birtast fyrst og fremst í tveimur flokkum lykilhæfni aðalnámsskrár, tjáningu og miðlun, og gagnrýninni og skapandi hugsun. Viðhorf kennara til viðfangsefna þar sem mikillar greinandi hugsunar er krafist eru almennt jákvæð þó bent hafi verið á að vægi slíkra viðfangsefna í námsefni á Íslandi sé yfirleitt lítið (Jóhann Örn Sigurjónsson og Jónína Vala Kristinsdóttir, 2018). Hingað til hafa fáar rannsóknir á kennsluháttum í

stærðfræði beint sjónum að því hvernig kennarar útfæra slík viðfangsefni í kennslustundum í þeim tilgangi að nemendur þrói með sér hæfni í gagnrýninni og skapandi hugsun í stærðfræði.

Samhliða samfélagsbreytingum þróaðra ríkja á undanförunum árum og áratugum, frá iðnaðarsamfélögum til þekkingarsamfélaga, hefur athygli í auknum mæli beinst að gæðum menntakerfa og gæðum kennslu (Cochran-Smith og Villegas, 2015). Gæði kennslu tengjast mjög náið námsárangri nemenda og beina rannsakendur því í auknum mæli sjónum að því hvernig best megi mæla gæði kennslu með áreiðanlegum hætti (Hanushek, Piopiunik og Wiederhold, 2018). Til að svara spurningum um gæði kennslu þarf fyrst að skilgreina vandlega hvað felst í gæðunum (Ding og Sherman, 2006). Flestir eru á þeirri skoðun að gæði kennslu séu bæði flókið og margslungið fyrirbæri og því krefjist rannsóknir á þeim fjölbreyttra aðferða (Croninger, Valli og Chambliss, 2012). Færa má rök fyrir því að gæði séu ekki hæfni sem kennari annaðhvort býr yfir eða ekki. Gæði eru fremur eitthvað sem kennari sýnir með gjörðum sínum í skólastofunni. Gæði kennslu geta verið mikil í einni kennslustund, minni í annarri og mismikil samkvæmt mismunandi gæðaviðmiðum. Hæpið er að búast við því að kennsla nái hæsta stigi allra viðmiða samtímis því að gjörðir kennarans eru háðar markmiðum hvernar kennslustundar og ólíkar kennsluáðferðir eru valdar í ljósi þess hvaða hæfni nemenda stefnt er að hverju sinni.

Faglegar kröfur sem kennari gerir til nemenda sinna er einn þáttur í gæðum kennslu. Í greiningarramma þessarar rannsóknar, PLATO (Protocol for Language Arts Teaching Observation), eru gæði kennslu talin samanstanda af fjórum yfirþáttum: Stigskiptum stuðningi, faglegum kröfum, framsetningu og notkun námsefnis og aðstæðum í kennslustofunni (Bell, Dobbelaer, Klette og Visscher, 2019). Í þessari rannsókn er sjónum sérstaklega beint að faglegum kröfum eða nánar tiltekið því gæðaviðmiði sem kallast vitsmunaleg áskorun (e. intellectual challenge). Í vitsmunalegri áskorun felst bæði val kennara á krefjandi viðfangsefnum og það hvernig kennsla þeirra tryggir vitsmunalega virkni nemenda. Þar sem vitsmunaleg áskorun er á háu stigi þurfa nemendur að beita greinandi hugsun, útskýra hugsun sína og rökstyðja niðurstöður. Leitast var við að leggja mat á gæði vitsmunalegrar áskorunar í stærðfræðikennslu á Íslandi, bæði með því að greina gæði kennslunnar út frá myndbandsupptökum af kennslustundum og með því að greina viðfangsefnin sem lögð voru fyrir nemendur.

Markmið þessarar rannsóknar var að öðlast aukinn skilning á þeim kröfum sem gerðar eru til nemenda í stærðfræði á unglingastigi grunnskóla út frá vitsmunalegri áskorun eins og hún birtist í kennslu og viðfangsefnum nemenda. Leitað var svara við eftirfarandi spurningu: Hvernig má lýsa faglegum kröfum sem gerðar eru til nemenda í stærðfræði á unglingastigi grunnskóla á Íslandi?

## GÆÐI OG FAGLEGAR KRÖFUR Í STÆRÐFRÆÐIKENNSLU

### Vitsmunaleg áskorun

Faglegar kröfur birtast meðal annars í því hvers konar verkefni kennari kýs að leggja fyrir nemendur og með hvaða hætti hann útfærir þau þannig að þau reyni á gagnrýna og greinandi hugsun nemenda. Að skapa nemendum tækifæri til þess að taka þátt í viðfangsefnum

sem fela í sér vitsmunalega áskorun, þar sem nemendur þurfa að beita greinandi hugsun og draga ályktanir til að þróa hugsun sína og skilning, er mikilvægur þáttur í gæðum kennslu (Praetorius og Charalambous, 2018). Þær kröfur sem gerðar eru til nemenda í kennslustundum í stærðfræði ráða miklu um það hvers konar hugsun þeir þurfa að beita til að komast að merkingarbærri niðurstöðu. Samkvæmt PLATO-greiningarrámanum er vitsmunaleg áskorun á háu stigi þegar áhersla er lögð á röksemdafærslu, ályktunarhæfni og greinandi hugsun nemenda (Grossman, 2019). Mikilvægt er að byggja undir hugtaka-skilning nemenda með því að hvetja þá til að útskýra hugsun sína og rökstyðja lausnir. Kennarinn ber ábyrgð á því að skapa nemendum sínum tækifæri til að þroska námshæfileika sína (Vygotsky, 1978).

Áskorunin sem kennari veitir nemendum í kennslustundum er að vissu marki háð eðli þeirra viðfangsefna sem lögð eru fyrir þá. Áhrif miskrefjandi viðfangsefna á nám hafa lengi verið efni rannsókna á sviði stærðfræðimenntunar og þó að nokkur samhljómur sé um mikilvægi slíkra viðfangsefna hafa fullyrðingar um bein tengsl við námsárangur stundum verið orðum auknar (Otten, Webel og de Araujo, 2017; Stein, Smith, Henningsen og Silver, 2009). Viðfangsefni þar sem gerðar eru miklar kröfur um rök hugsun geta verið vandasöm í framkvæmd, jafnt fyrir nemendur sem kennara. Fyrir árangursríka kennslu slíkra viðfangsefna er talið mikilvægt að kennarar hafi góða fagþekkingu (Wilhelm, 2014). Til þess að viðhalda kröfum um rök hugsun og þeirri áskorun sem felst í viðfangsefnum hefur það gefið góða raun fyrir kennara að hafa til þess stuðning, til að mynda úr starfsþróunarverkefnum (Tekkumru-Kisa, Stein og Doyle, 2020). Útfærsla kennara á viðfangsefnum í skólastofunni skiptir sköpum um það hvaða lærdóm nemendur draga af þeim.

Einn vandinn við að nota myndbönd til að greina hvernig gæðaviðmið eru uppfyllt í kennslustundum er sjálfstæð vinna nemenda í námsbókum en það er algeng kennslu-aðferð á Íslandi (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014; Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson, 2012). Mögulega beita nemendur greinandi hugsun og draga ályktanir í uppbyggingu lausna sinna þegar þeir vinna einir í námsbókum en erfitt er að meta það af myndbandinu einu saman. Því er afar mikilvægt að líta til inntaks þeirra viðfangsefna sem nemendur vinna að og athuga hvernig kennarar útfæra þau. Í viðfangsefnum sem fela í sér takmarkaða áskorun getur kennari aukið hana með því að biðja nemendur að rökstyðja svör sín og útskýra lausnir sínar. Á sama hátt getur kennari dregið úr áskorun viðfangsefna með því að segja nemendum nákvæmlega hvernig þeir eigi að leysa þau eða með því að segja þeim lausnina.

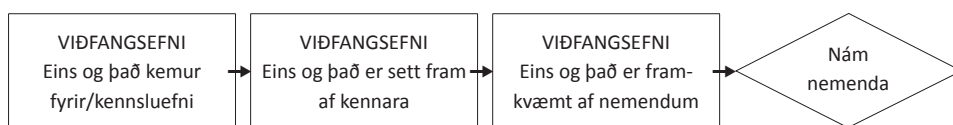
Notkun viðfangsefnis sem útgangspunkts í rannsóknum á hugsun nemenda í stærðfræði á rætur að rekja til rannsókna Walters Doyle upp úr 1980. Hann færði rök fyrir því að vinna nemenda réðist að mestu af því hvers konar viðfangsefni þeim væri gert að leysa og þar með hvernig þeir hugsuðu um og skildu stærðfræði (Doyle, 1983). Undanfarin 40 ár hafa margar rannsóknir byggst á hugmyndum Doyles og færa Tekkumru-Kisa, Stein og Doyle rök fyrir því í nýlegri grein að enn séu tækifæri til frekari rannsókna á þessu sviði. Sem dæmi nefna þau rannsóknir á því hvernig samræður nemenda og kennara í kennslustundum geta viðhaldið áskorun í viðfangsefnum þar sem úrlausn krefst mikillar greinandi hugsunar (Russo og Hopkins, 2017; Tekkumru-Kisa o.fl., 2020).

Í greiningarrámanum TAG (The Task Analysis Guide) er viðfangsefnum í stærðfræði skipt niður í fjóra flokka. Í flokki 1 og 2 eru viðfangsefni þar sem lítillar greinandi hugsunar

er krafist og í flokkum 3 og 4 eru viðfangsefni þar sem mikillar greinandi hugsunar er krafist (Stein og Smith, 1998). Meira krefjandi viðfangsefni eru talin styðja greinandi hugsun því þar þurfa nemendur að réttlæta svör sín og færa rök fyrir lausnaleið sinni. Í rannsókn sem gerð var á íslenskum stærðfræðinámsbókum í framhaldsskólum voru yfir 80% viðfangsefna í flokki þar sem gerðar eru litlar vitsmunalegar kröfur (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2014). Þegar slík viðfangsefni liggja til grundvallar í kennslustundum þarf kennarinn að auka kröfur og tengingar við inntak til að efla hugtakaskilning nemenda.

Margir þættir geta haft áhrif á þátttöku og árangur í námi og eru því tilgátur um orsakatengsl milli krefjandi viðfangsefna og námsárangurs enn vandkvæðum háðar (Otten o.fl., 2017). Þrátt fyrir þau vandkvæði hafa rannsóknir bent til þess að sterk fylgni sé á milli vitsmunalegrar virkni nemenda í kennslustundum og námsárangurs (Baumert o.fl., 2010). Kennarar virðast þó hafa tilhneigingu til að draga úr áskorun, en með aukinni fagþekkingu gengur þeim betur að viðhalda áskorun eða jafnvel auka á hana (Wilhelm, 2014). Bent hefur verið á gagnsemi þess að kennarar hljóti sérstaka þjálfun í að viðhalda kröfum sem stuðla að greinandi hugsun nemenda (Norton og Kastberg, 2012).

Í stærðfræðiverkefnarammanum (e. the mathematical tasks framework) er því lýst hvernig stærðfræðileg viðfangsefni þróast í skólastofunni (Stein og Smith, 1998). Námsnemenda er þannig háð því hver viðfangsefni eru, hvernig þau eru sett fram af kennara og loks hvernig viðfangsefni eru leyst af nemendum sjálfum (sjá mynd 1). TAG-greiningarramminn er byggður á hugmyndafræði stærðfræðiverkefnarammans. Markmið TAG-greiningarrammans er að greina viðfangsefni eins og þau birtast í námskrá eða námsefni en ekki eins og þau eru sett fram í skólastofunni. Aftur á móti metur PLATO-greiningarramminn af talsverðri nákvæmni hvernig viðfangsefni eru sett fram af kennara og að hluta hvernig þau eru unnin af nemendum, þó það sé háð því sem sést í myndbandsgögnum. Með því að nota bæði TAG og PLATO fæst fjölbátta nálgun við að skoða vitsmunalega áskorun, bæði út frá eðli viðfangsefna sem lögð eru fyrir og framsetningu og útfærslu kennara í kennslustundum.



**Mynd 1. Stærðfræðiverkefnaramminn um þróun viðfangsefna í skólastofunni (Stein og Smith, 1998)**

## Rannsóknir á stærðfræðikennslu á Íslandi

Rannsóknir á stærðfræðikennslu á Íslandi benda til þess að hér á landi sé áhersla lögð á færni í reikniaðferðum og að nemendur vinni mikið hver fyrir sig í námsbókum. Í úttekt á stærðfræðikennslu á unglingsstigi grunnskóla frá 2012 kom í ljós að meirihluti kennslustunda snerist um einstaklingsvinnu nemenda í vinnubókum með aðstoð kennara (Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson, 2012). Um 83% kennara sögðust nota þessa kennsluaðferð annaðhvort mjög mikið eða frekar mikið. Í um þriðjungu kennslustunda var innlögð frá kennara með samræðum við nemendur. Sams konar niðurstöður mátti sjá

Í rannsókn Guðnýjar Helgu Gunnarsdóttur og Guðbjargar Pálsdóttur (2015) þar sem þær ályktuðu að í flestum stærðfræðikennslustundum á Íslandi ynnu nemendur einir í námsbókum þar sem kennarinn gengi á milli og aðstoðaði þá. Nokkur dæmi voru þó um kennslu þar sem áhersla var lögð á hópvinna og umræður en þau voru afar fátíð. Í þeim hluta rannsóknar á starfsháttum í grunnskólum sem sneri að kennsluháttum leiddu niðurstöður sömuleiðis í ljós að samvinna eða hópvinna nemenda væri almennt ekki útbreidd kennsluaðferð í grunnskólum hér á landi (Ingvar Sigurgeirsson, Amalía Björnsdóttir, Gunnhildur Óskarsdóttir og Kristín Jónsdóttir, 2014). Í úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum var sams konar kennsluháttum lýst. Auk þess var bent á að verkefni þar sem nemendur þurftu að setja fram eigin röksemdafærslu til að þróa hugtakaskilning voru fátíð og sönnunarverkefni vantaði svo til alveg (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Þessar lýsingar á stærðfræðikennslu á Íslandi eru í nokkru samræmi við lýsingar Pehkonens, Hemmis, Krzywackis og Laines á stærðfræðikennslu í Svíþjóð þar sem nemendur unnu í námsbókum á eigin hraða án nokkurrar kennslu (2018).

Í einu fyrirbyggjandi myndbandsrannsókninni þar sem kennsla íslenskra stærðfræðikennara er borin saman við kennslu í öðrum löndum lýsti Savola (2010) finnskum stærðfræðikennurum sem „heldur hefðbundnum“, en íslenskum stærðfræðikennurum sem „framsæknum“ með notkun sinni á nemendamiðuðum aðferðum. Miklar andstæður mátti finna í sjálfstæðri vinnu nemenda á Íslandi í samanburði við áherslu á bekkjar-kennslu í Finnlandi. Savola komst að þeirri niðurstöðu að íslenskir kennarar legðu almennt áherslu á einstaklingsvinnu og að nemendur stýrðu eigin námi á kostnað stærðfræðilegrar samræðu og röksemdafærslu. Í stærðfræðihluta PISA-rannsóknarinnar (OECD, 2019) hefur gengi Finnlands á undanförunum árum verið best Norðurlandanna en gengi Íslands verst. Hugsanlegt er að skýringu á því megi að hluta tengja gæðum vitsmunalegrar áskorunar í kennslustundum.

## AÐFERÐ

Rannsóknin er þáttur í starfi norræns öndvegisseturs, Quality in Nordic Teaching (QUINT), sem er leiðandi í samanburðarrannsóknum á gæðum kennslu á Norðurlöndum. Eitt af markmiðum QUINT er að leggja mat á gæði kennslu í þremur námsgreinum. Byggt er á myndbandsgögnum sem safnað er í kennslustundum ásamt öðrum gögnum frá nemendum og kennurum. Einn helsti kostur myndbandsgagna er að með þeim má horfa endurtekið á þau atvik, samskipti og aðstæður sem skapast í skólstofunni og þannig greina slíkt á nákvæmari hátt en hægt er með hefðbundnum vettvangsathugunum. Í þessari grein liggja einungis til grundvallar gögn um stærðfræðikennslu á Íslandi. Öllum reglum um siðferði við öflun rannsóknargagna var fylgt í rannsókninni. Upplýst samþykki var fengið skriflega frá öllum þátttakendum, það er kennurum, nemendum og forráðamönnum nemenda. Rannsóknin var unnin í samræmi við lög um vinnslu persónuupplýsinga með tilkynningu til Persónuverndar og lagði vísindasiðanefnd Háskóla Íslands mat á rannsóknina án athugasemda.

## Þátttakendur

Tíu íslenskir grunnskólar tóku þátt í rannsókninni. Skólarnir voru valdir með það að markmiði að fá sem fjölbreyttastan nemendahóp, bæði hvað varðaði bakgrunn nemenda, staðsetningu og gerð skóla. Í úrtakið voru valdir skólar víðs vegar af landinu, bæði úr dreifbýli og þéttbýli, auk þess sem litið var til mismunandi gerða kennslurýma og kennsluhátta. Alls tóku 11 stærðfræðikennarar þátt í rannsókninni þar sem í einum skólanum voru tveir kennarar saman með teymiskennslu. Í töflu 1 má sjá upplýsingar um skóla og kennara sem tóku þátt í rannsókninni.

**Tafla 1. Einkenni skóla og staðsetning, kennslureynsla og sérhæfing stærðfræðikennara**

Skóli	Einkenni skóla*	Staðsetning**	Kennslureynsla (ár)	Sérgrein stærðfræði
Skóli A	Stór skóli	Stór bær	16	Já
Skóli B	Stór skóli	Bær	16	Nei
Skóli C	Stór skóli	Borg	11	Já
Skóli D	Meðalstór skóli	Bær	33	Nei
Skóli E	Stór skóli	Borg	1	Nei
Skóli F	Meðalstór skóli	Stór bær	4	Já
Skóli G	Lítill skóli	Lítill bær/dreifbýli	10	Já
Skóli H	Lítill skóli	Lítill bær/dreifbýli	14	Já
Skóli I	Lítill skóli	Lítill bær/dreifbýli	1	Nei
Skóli J	Stór skóli	Stór bær	28	Nei

\* Stór skóli > 500 nemendur, meðalstór skóli = 300–500 nemendur, lítill skóli < 300 nemendur

\*\* Borg > 100.000 íbúar, Stór bær = 15.000–100.000 íbúar, Bær = 3.000 – 15.000 íbúar, lítill bær/dreifbýli < 3.000 íbúar

## Gagnaöflun

Teknar voru upp þrjár til fjórar samliggjandi kennslustundir í 8. bekk í stærðfræði í hverjum þátttökuskóla, alls 34 kennslustundir. Í hverri upptöku voru notaðar tvær myndbandsupptökuvélar, önnur staðsett aftast í kennslustofunni og hin fremst, til að mynda kennslustundina frá tveimur sjónarhornum. Einnig voru notaðir tveir hljóðnemar; annan bar kennarinn en hinn var í miðri stofunni og nam samræður nemenda. Auk myndbands-gagna var gögnum safnað með viðtölum við kennara og spurningalista sem var lagður fyrir nemendur. Þá var stuðst við ýmis gögn úr kennslustundum, svo sem ljósmyndir af viðfangsefnum nemenda og kennsluáætlanir. Í þessari grein er eingöngu fjallað um greiningu á myndbands-gögnum og viðfangsefnum nemenda. Öll þau viðfangsefni sem komu fyrir í kennslustundunum í stærðfræði voru greind út frá myndböndunum og með hliðsjón af kennsluáætlunum. Um var að ræða greiningu á viðfangsefnum eins og þau voru lögð fyrir en ekki greiningu á lausnaleiðum nemenda.

## Greining námsgagna

Alls voru 144 viðfangsefni greind. Við greiningu viðfangsefna var notaður TAG-greiningarrammi Steins og Smiths (1998). Í honum eru viðfangsefni greind í fjóra flokka eftir því hversu mikillar greinandi hugsunar úrlausn þeirra krefst af nemendum. Viðfangsefni í flokki 1 og 2 leiða til lítillar greinandi hugsunar nemenda en í flokki 3 og 4 eru viðfangsefni sem leiða til mikillar greinandi hugsunar (sjá töflu 2). Í TAG-greiningarrammanum eru viðfangsefni metin eftir því hvernig þau koma fyrir í námsefni nemenda, án tillits til þess hvernig þau eru sett fram af kennara eða túlkuð af nemendum (Stein og Smith, 1998). Í flestum tilvikum voru viðfangsefni greind eftir dæmanúmerum í námsbókum en einnig voru greind verkefni sem samin voru af kennurum.

**Tafla 2. Fjórir flokkar viðfangsefna samkvæmt TAG-greiningarrammanum**

<b>Flokkur 1</b> Að leggja á minnið	Nemendur þurfa að kalla fram áður lærðar staðreyndir, reglur, formúlur eða skilgreiningar sem þeir hafa lagt á minnið. Tímatakmörkanir koma í veg fyrir að hægt sé að leiða sig að svari. Viðfangsefni kemur ekki á óvart, endursköpun á áður séðu efni, það sem gera skal er alveg skýrt. Tengingu skortir milli stærðfræðilegra hugtaka og undirliggjandi merkingar.
<b>Flokkur 2</b> Aðferðir án tengsla	Af fyrri reynslu, kennslu eða staðsetningu í námsefni er augljóst hvaða aðferð á að nota til að leysa viðfangsefnið. Ljóst er hvað á að gera og hvernig en ekki hvers vegna. Ekki er gerð krafa um greinandi hugsun. Engin tengsl eru við hugtök og merkingu sem liggur að baki aðferðinni sem er notuð. Frekar er einblínt á að komast að rétttri niðurstöðu en að þróa skilning. Ekki er krafist útskýringa eða þær snúast aðeins um aðferðina sem notuð var.
<b>Flokkur 3</b> Aðferðir með tengslum	Sjónum nemenda er beint að tilgangi aðferðanna til þess að þeir öðlist dýpri skilning á stærðfræðilegum hugtökum og hugmyndum. Í viðfangsefninu er lögð til ákveðin lausnaleyð, beint eða óbeint, sem felst í almennum aðferðum náskyldum undirliggjandi hugmyndum. Þó almennum aðferðum sé fylgt eftir er það ekki gert án umhugsunar. Viðfangsefnið er gjarnan sett fram á ólíka vegu, til dæmis myndrænt eða táknrænt, þar sem tenging á milli mismunandi framsetningar hjálpar til við að þróa skilning. Glíma þarf við undirliggjandi hugmyndir aðferðarinnar á viðunandi hátt til að þróa skilning. Beita þarf greinandi hugsun að einhverju marki.

---

<b>Flokkur 4</b>	Beita þarf greinandi hugsun. Hvorki ákveðin aðferð né lausnaleið er lögð til.
Að iðka stærðfræði	Nemendur þurfa að kanna og skilja eðli stærðfræðilegra hugtaka, aðferða og tenginga. Þess er krafist að nemendur bæði skrái og fylgist með eigin hugsanaferli. Þekkingu og reynslu þarf að nota á viðeigandi hátt við að leysa viðfangs-efnið. Greina þarf upp á eigin spýtur hvað skal gera og sjá hvernig forsendur takmarka mögulegar lausnir og lausnaleiðir. Úrlausn krefst töluverðrar hugsunar. Vegna þess hversu ófyrirsjáanleg lausnaleiðin er getur það valdið nemenda. (Stein o.fl., 2009, bls. 6; íslensk þýðing Jóhann Örn Sigurjónsson og Jónína Vala Kristinsdóttir, 2018)

---

## Greining myndbandsgagna

Til að greining myndbandsgagna úr kennslustundum geti verið nákvæm og réttmæt þarf traustan og áreiðanlegan greiningarramma (e. classroom observation system). Tvö lykilmarkmið slíkra greiningarramma eru að skilja og að bæta kennslu. PLATO-greiningarramminn sem notaður er í þessari rannsókn, er með þekktari matstækjum á gæðum kennslu (Bell o.fl., 2019). Greiningarramminn var hannaður af teymi rannsakenda við Stanford-háskóla og er víða notaður við mat á gæðum kennslu. PLATO var upphaflega hannaður í þeim tilgangi að meta samband kennsluhátta í móðurmálskennslu á unglingsstigi og árangurs nemenda. Síðan þá hefur greiningarramminn verið aðlagður til að meta gæði kennslu í öðrum námsgreinum auk þess sem hann er notaður sem starfsþróunartæki til þess að aðstoða kennara við að tileinka sér áhrifaríka kennsluhætti.

Í PLATO-greiningarrammanum er kennslustundum skipt í 15 mínútna myndhluta sem greindir eru hver fyrir sig. Innan fjögurra yfirþátta PLATO eru tólf greiningarviðmið en umfjöllunarefni þessarar greinar einskorðast við greiningarviðmiðið sem þýtt hefur verið sem vitsmunaleg áskorun (e. intellectual challenge). Hvert greiningarviðmið er metið á fjögurra punkta kvarða fyrir hvern 15 mínútna hluta kennslustundar. Í þeim 34 kennslustundum sem teknar voru upp á myndband voru alls greindir 88 myndhlutar. Til þess að nota PLATO þarf rannsakandi að hafa lokið námskeiði í notkun mælitækisins og hafa fengið viðeigandi áreiðanleikavottun. Áreiðanleiki milli rannsakenda var prófaður með því að bera saman útkomu úr fyrstu 15 mínútna hlutum tveggja kennslustunda úr hverjum skóla. Í töflu 3 má sjá lýsingar á mismunandi þrepum greiningarviðmiða vitsmunalegrar áskorunar.



**Tafla 3. Greiningarviðmið fyrir vitsmunalega áskorun úr PLATO-greiningarrámanum (stytt lýsing)**

Vitsmunaleg áskorun	
<b>1. þrep</b>	Kennari leggur fyrir verkefni eða viðfangsefni sem byggjast nánast eingöngu á minnisatriðum og utanbókarnámi.
<b>2. þrep</b>	Kennari leggur fyrir verkefni eða viðfangsefni sem byggjast að mestu á minnisatriðum og utanbókarnámi, en lítill hluti viðfangsefnanna kallar á greiningu, túlkun, ályktanir eða hugmyndasköpun.
<b>3. þrep</b>	Kennari leggur fyrir viðfangsefni sem eru mismunandi hvað varðar kröfur um rökhugsun: Flest kalla á greiningu, túlkun, ályktanir eða hugmyndasköpun en nokkur beinast að minnisatriðum eða utanbókarnámi.
<b>4. þrep</b>	Kennari leggur fyrir krefjandi viðfangsefni sem flest reyna á greinandi hugsun og ályktunarhæfni, meðal annars að taka saman og leggja mat á upplýsingar og/eða rökstyðja svör eða afstöðu (Grossman, 2019).

Í greiningu á vitsmunalegri áskorun geta athugasemdir eða spurningar kennarans til nemenda verið til hækkunar eða lækkunar um eitt þrep eftir því hvort aukið er á eða dregið úr þeim kröfum sem felast í viðfangsefninu eins og það er upphaflega sett fram. Að auki er tímabáttur í viðmiðinu sem lýsir sér þannig að ef minna en helmingur hvers 15 mínútna hluta inniheldur vinnu að lausn viðfangsefna þar sem greinandi hugsunar er krafist þá er vitsmunaleg áskorun á 2. þrepi. Ef meira en helmingur hlutans inniheldur slíka vinnu þá er hlutinn á 3. þrepi.

Mælt hefur verið með notkun PLATO af nokkrum ástæðum: PLATO á sér samsvörun við fyrirbyggjandi rannsóknir á gæðum kennslu, fjórir yfirþættir hans endurspeglar þau svið sem rannsóknir hafa metið sem lykilatriði náms. PLATO byggist á athugunarkerfi, hann veitir tækifæri til kerfisbundins samanburðar á kennslu milli námsgreina, landa eða skóla auk þess sem möguleiki er á að nota rammann til að kanna hugsanlega menningarlega hlutdrægni (Klette, Blikstad-Balas og Roe, 2017).

Með því að nota bæði TAG-greiningarrámann og PLATO-greiningarrámann fæst heildstæð sýn á kröfur til nemenda um greinandi hugsun í stærðfræði. Í TAG er áskorunin metin eins og hún kemur fyrir í námsefninu, án tillits til þess hvernig efnið er sett fram af kennara eða túlkað af nemendum. Í PLATO er útfærsla viðfangsefnanna í kennslustundum metin. Með því að bera saman niðurstöður þessara tveggja greininga má sjá tengslin milli þess hvers konar viðfangsefni kennarar kjósa að leggja fyrir nemendur og þess hvort kröfur um greinandi hugsun eru gerðar í kennslustundum.

## NIÐURSTÖÐUR

Viðfangsefni sem komu fyrir í kennslustundunum voru 144 talsins og voru þau greind með TAG-greiningarrammanum. Auk þess var gæðaviðmiðið vitsmunaleg áskorun metið með myndbandsupptökum úr 34 kennslustundum í stærðfræði samkvæmt PLATO-greiningarrammanum í 15 mínútna hlutum (alls 88 myndhlutar).

### Greining viðfangsefna

Af öllum viðfangsefnum kennslustundanna sem greind voru samkvæmt TAG-greiningarrammanum voru 64% í flokki 2 og krafðist úrlausn þeirra því notkunar reikniaðferða án tengingar við undirliggjandi hugtök eða merkingu að baki aðferðunum. Í sex skólum af tíu var meirihluti viðfangsefna í þessum flokki. Hlutfall viðfangsefna í TAG-flokki 3 var 33%. Í þeim flokki er úrlausnin ekki augljós af sýnidæmi og greinandi hugsunar er krafist við úrlausn viðfangsefnisins eins og það kemur fyrir í námsbókinni. Slík viðfangsefni komu fyrir í öllum þátttökuskólum en voru aðeins í meirihluta í skóla C. Einungis fjögur viðfangsefni voru í TAG-flokki 4, það er að iðka stærðfræði. Uppruni þeirra var bæði í námsbókunum *Átta-tíu* og *Skala* en einnig í námsleik frá kennara. Ekkert af viðfangsefnum kennslustundanna var í TAG-flokki 1, sem er að leggja á minnið. Í töflu 4 má sjá hvernig flokkar viðfangsefna dreifðust eftir skólum.

**Tafla 4. Dreifing á flokkum viðfangsefna eftir skólum samkvæmt TAG-greiningu**

Skóli	Flokkur 1	Flokkur 2	Flokkur 3	Flokkur 4	Alls
Skóli A	0	14	2	0	16
Skóli B	0	9	1	0	10
Skóli C	0	1	9	0	10
Skóli D	0	5	4	0	9
Skóli E	0	8	3	0	11
Skóli F	0	12	9	1	22
Skóli G	0	4	1	1	6
Skóli H	0	5	4	1	10
Skóli I	0	5	2	0	7
Skóli J	0	30	12	1	43
Alls	0	93 (64%)	47 (33%)	4 (3%)	144

Talsverðan mun mátti sjá á fjölda viðfangsefna eftir skólum. Skóli J skar sig úr þar sem alls 43 ólík viðfangsefni komu við sögu. Það skýrist af því að í öllum kennslustundunum voru nemendur að vinna sjálfstætt samkvæmt áætlunum í þremur ólíkum köflum í tveimur mismunandi bókum. Í skóla F komu 22 ólík viðfangsefni við sögu með sams konar tilhögun. Í öðrum skólum lágu mun færri viðfangsefni til grundvallar í kennslustundunum. Í

skólum G og H voru tiltölulega fá viðfangsefni en þar voru þau ýmist úr námsbókum eða frá kennara, þar sem ákveðin verkefni voru lögð fyrir alla nemendur samtímis. Í töflu 5 má sjá uppruna viðfangsefna eftir skólum.

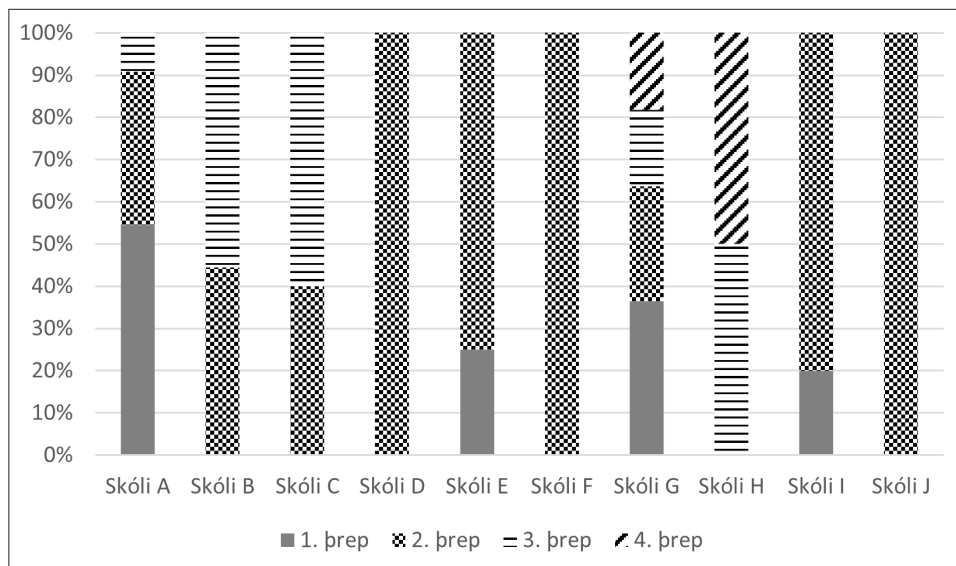
**Tafla 5. Uppruni viðfangsefna eftir skólum**

Skóli	Uppruni viðfangsefna	Efnisþættir
Skóli A	<i>Almenn stærðfræði II</i> , verkefni frá kennara	Hlutföll, rúmfræði
Skóli B	<i>Skali 1B</i>	Algebra og stæður
Skóli C	Verkefni frá kennara og rafræn spurningakeppni	Algebra
Skóli D	<i>Átta-tíu 2</i>	Algebra
Skóli E	<i>Skali 1B</i>	Tölfræði
Skóli F	<i>Skali 1B</i>	Tölfræði, algebra
Skóli G	<i>Átta-tíu 1 og 3, Skali 1B</i> , verkefni frá kennara	Stæður
Skóli H	<i>Átta-tíu 1 og 2</i> , verkefni frá kennara	Hlutföll
Skóli I	Verkefni frá kennara, <i>Skali 1B</i>	Stæður
Skóli J	<i>Skali 1B og 2B</i>	Tölfræði, rúmfræði, algebra

## Greining vitsmunalegrar áskorunar í kennslu

Vitsmunaleg áskorun í stærðfræðikennslustundum í þátttökuskólunum var á 2. þrepi í meirihluta myndhluta samkvæmt PLATO-greiningarrámanum, eða 63%. Vitsmunaleg áskorun var á 3. þrepi í 14% myndhluta og á 4. þrepi í 7% myndhluta. Þetta gaf til kynna að í litlum hluta kennslustunda reyndist áhersla lögð á greinandi hugsun nemenda, túlkun eða hugmyndasköpun. Í meirihluta myndskleiðanna sem greind voru unnu nemendur í námsbókum megnið af kennslustundinni á meðan kennari gekk á milli og aðstoðaði. Algengt var að kennarar drægju úr vitsmunalegri áskorun með því að sjá um hugsunarvinnuna fyrir nemendur í aðstoð sinni. Meirihluti myndhluta sem var á 2. þrepi féllu þar vegna lækkunar af 3. þrepi. Hlutfall myndhluta á 1. þrepi vitsmunalegrar áskorunar var 16%. Í þeim tilvikum var oftast um að ræða fyrirlestur kennara við töflu þar sem nemendur fylgdust með kennara reikna dæmi eða skrifa glósur á töflu, ýmist til upprifjunar eða sem innlög, og voru því ekki virkir þátttakendur. Einnig féllu á 1. þrep myndhlutar þar sem nemendur horfðu á kennslumyndbönd hver í sinni spjaldtölvu án þess að gagnrýnar eða opnar spurningar fylgdu.

Á mynd 2 má sjá dreifingu þrepa vitsmunalegrar áskorunar eftir skólum. Í skólum D, E, F, I og J má sjá að vitsmunaleg áskorun fór aldrei upp fyrir 2. þrep í hverjum 15 mínútna hluta kennslustundar. Í skóla A, B og C fór vitsmunaleg áskorun hæst á 3. þrep. Aðeins í skólum G og H fór vitsmunaleg áskorun í einhverjum tilvikum á 4. þrep þar sem nemendur þurftu bæði að beita greinandi hugsun og að vega og meta upplýsingar til að rökstyðja mál sitt. Þar mátti sjá að athugasemdir og spurningar kennarans voru til þess fallnar að auka á vitsmunalega áskorun á nemendur á meðan mun algengara var að sjá kennara draga úr henni.



**Mynd 2. Dreifing á þrepum vitsmunalegrar áskorunar eftir skólum samkvæmt PLATO-greiningu**

## Dregið úr vitsmunalegri áskorun

Í skólum D, F og J voru kennsluhættir í öllum myndskeiðunum þannig að nemendur unnu eftir áætlun frá kennara með númerum þeirra dæma sem þeim var ætlað að leysa í námsbókinni. Kennarinn gekk svo á milli og aðstoðaði nemendur, sem voru mislangt komnir í áætlunum sínum. Í öllum tilvikum í þessum þremur skólum drógu kennararnir úr vitsmunalegri áskorun, til dæmis með því að segja nemendum nákvæmlega hvernig ætti að reikna dæmin eða segja þeim svörin, og lækkaði því áskorun niður á 2. þrep. Aðstoð kennarans fólst aðallega í því að fá rétt svar en miðaði minna að skilningi. Eftirfarandi er dæmi um hvernig kennari dró úr vitsmunalegri áskorun þegar nemandi bað um aðstoð við að leysa jöfnuna  $12 - 3x = 6$  (TAG: Flokkur 2):

Kennari: Bíddu við, hvernig fékkstu  $9x$ ?

Nemandi: Því ég mínusaði.

Kennari: Er þetta  $x$ ?

Nemandi: Nei.

Kennari: Eru þetta eins liðir?

Nemandi: Nei.

Kennari: Hérna áttu tólf epli og þrjár appelsínur, borðar þrjár appelsínur, áttu þá níu hvað? Eplin eru ósnert.

Nemandi: Já.

- Kennari: Þú mátt ekki ... það er ekki  $x$  hérna. Þetta eru ekki eins liðir. Þannig að byrjaðu að fara með ... að reyna að fá  $x$ .
- Nemandi: Ég veit aldrei hverju ég á að byrja á.
- Kennari: Við byrjum alltaf á því að draga saman líka liði ef við getum, en ég vil ekki vita hvað mínus  $x$  er. Til að breyta mínus í plús hvað gerum við þá?
- Nemandi: Förum með hann yfir.
- Kennari: Förum með hann yfir, já. Þannig að stökum þetta út bara. Þá ertu kominn með hérna  $12 = 6 + 3x$ . Svo heldurðu áfram að laga þetta. Ókei?

Í dæminu sá kennarinn um aðgerðina að leggja  $3x$  við beggja vegna jafnaðarmerkisins fyrir nemandann án þess að draga fram hugsun eða skilning nemandans á því hverju það byggist á að „fara með hann yfir“.

Einnig voru dæmi þess að dregið væri úr áskorun viðfangsefna sem myndu annars teljast nokkuð krefjandi og flokkuðust þar með í flokk 3 samkvæmt TAG-greiningu. Í eftirfarandi samræðu má sjá dæmi um slíkt. Nemandi hefur talnamynstur með númeruðum myndum af vaxandi fjölda kubba, táknuðum með  $m$ , þar sem  $m_1=5$ ,  $m_2=9$  og  $m_3=13$ . Verkefni nemandans var að búa til formúlu fyrir  $m_n$  og finna  $m_{80}$ . Nemandinn biður um aðstoð:

- Kennari: Já, búðu til formúlu. Hvað breytist hérna á milli?
- Nemandi: Einn plús ...
- Kennari: Það bætast við fjórir. Þá skrifar þú  $4x$ . Ef þú tekur 4 af þessu, hvað verður mikið eftir?
- Nemandi: Einn.
- Kennari: Plús einn. Og svo er  $x$ -ið  $m$ -númerið
- Nemandi: Þannig að ef ég væri að finna 80, myndi ég þá bara gera fjórir...
- Kennari: Fjórir sinnum 80 plús einn
- Nemandi: Ókei.
- Kennari: Þetta er gert svona (kennari slær inn í reiknivél nemandans) fjórir sinnum 80 plús einn.

Þarna leysti kennarinn í raun dæmið í heild án þess að nemandinn þyrfti að sýna fram á nokkurn skilning eða eigin hugsun.

Í mörgum tilfellum mátti einnig sjá kennara segja nemendum nákvæmlega hvað ætti að gera. Sem dæmi um slíkt bað nemandi um aðstoð við að finna flatarmál hluta úr hring. Kennarinn svaraði: „Ef ég væri að gera þetta dæmi þá myndi ég gera þrjár í öðru sinnum þí deilt með tveimur.“ Kennarinn hefur hér leyst dæmið að fullu og gefið nemandanum lausnina. Það eina sem nemandinn á eftir að gera er að slá það sem kennarinn sagði inn í reiknivél og skrifa útkomuna. Í sumum tilfellum var nemendum ekki beinlínis gefið svarið en lítið rými var gefið til hugsunar og hugtakanotkun var jafnframt vafasöm, eins og eftirfarandi dæmi sýnir. Nemandi bað um aðstoð við að leysa jöfnuna  $\frac{25}{G} = 15$  (TAG: Flokkur 2):

- Kennari: Mér finnst mikið þægilegra í staðinn fyrir að skrifa þetta svona að þú skrifer þetta svona jafnt og 15. Þú vilt ekki vita hvað deilingar G er, hvernig getur þú breytt því í venjulegt G?
- Nemandi: Færa það yfir.
- Kennari: Nei nei, þá ertu með 75 og 15 og þá kemur G-ið og hvað gerir það?
- Nemandi: Sinnum.
- Kennari: Rétt, og þá þarftu að færa 15, hér er það að margfalda. Hinum megin gerir það hvað?
- Nemandi: Deila.
- Kennari: Rétt, burt með 15, þá kemur svarið.

Ólíkt dæminu á undan var nemandanum ekki beinlínis gefið svarið. Engu að síður var dregið úr áskorun með því að leiða nemandann í gegnum reikniaðferð með lokuðum spurningum þar sem fáir svarmöguleikar komu til greina. Áherslan virðist vera á að fá rétt svar á kostnað þess að draga fram hugsun og skilning nemandans.

## Vitsmunalegri áskorun viðhaldið eða hún aukin

Í skóla A, B og C var vitsmunaleg áskorun hæst á 3. þrepi. Í þeim skólum var það raunin þegar nemendur voru að vinna í verkefnum og kennarar drógu ekki úr áskorun með aðstoð sinni, spurningum eða athugasemdum. Í þessum skólum var kennslan aldrei talin auka vitsmunalega áskorun.

Í skólum G og H var vitsmunaleg áskorun hæst á 4. þrepi. Í þeim tilvikum voru nemendur látnir rökstyðja eða útskýra svör sín fyrir öðrum og var því aukið á vitsmunalega áskorun. Í skóla G fór hluti einnar kennslustundar á 4. þrep þegar námsleikurinn 24 var spilaður. Í hverri lotu skrifaði kennarinn fjórar tölur á töfluna og nemendur áttu að búa til stæðu sem hefði gildið 24 með því að nota reikniaðgerðir, sviga eða veldi (TAG: Flokkur 4). Í eftirfarandi samræðu mátti greina að vitsmunaleg áskorun var aukin:

- Kennari skrifar 8 7 9 1 [10 sekúndur líða].
- Nemandi 1: Ókei, ég er búinn að finna það út.
- Kennari: Ókei.
- Nemandi 1: Einn mínus ... eða þá sjö mínus einn.
- Kennari: Sjö mínus einn eru sex.
- Nemandi 1: Ég veit. Níu mínus sex.
- Kennari: Já.
- Nemandi 1: Og svo þrjár sínum átta.
- Kennari: (Skrifar: (7-1)). Þú sagðir sjö mínus einn, og hvað myndirðu svo gera?
- Nemandi 1: Svo myndi ég gera þá að níu mínus sex, sem er svarið, sjö mínus einn, þannig að ...
- Kennari: Já, en hvernig myndirðu setja þetta upp?
- Nemandi 1: Ég myndi setja níu fyrir framan.

- Kennari: Níu mínus svigi sjö mínus einn.
- Nemandi 1: Og er þrír, og það sinnum átta.
- Kennari: (Skrifar:  $9-(7-1)$ ). Ókei. Og þá segi ég sinnum átta hér? (Skrifar:  $9-(7-1)*8$ ).
- Nemandi 1: Uuuu, þú setur annan sviga fyrir framan níu, og svo sviga fyrir aftan.
- Kennari: Af hverju gerirðu það?
- Nemandi 1: Af því að annars þá væri þetta sex sinnum átta.
- Kennari: Af því að ef ég myndi byrja á því að losa út úr þessum hérna sviga, þá er ég komin með þetta hér.
- Kennari: (Skrifar:  $9-6*8$ ). Og hvað myndum við byrja á að gera þarna?
- Nemandi 2: Sex sinnum átta.
- Kennari strokar út  $9-6*8$  og bætir við línu þar sem stendur:  $(9-(7-1))*8$ .

Kennarinn bað nemendur að útskýra lausn sína og skrifaði upp hvernig stæðan átti að líta út samkvæmt útskýringunum. Í lok næstu kennslustundar var námsleikurinn einnig spilaður í nokkrar lotur. Sá hluti var hins vegar á 3. þrepi vegna þess að kennarinn jók ekki á áskorunina með sama hætti. Kennarinn samþykkti úrlausn nemenda án þess að láta þá útskýra hvernig ætti að skrifa stæðuna eða leita nánari skýringa á úrlausninni.

Í skóla H var vitsmunaleg áskorun ekki í neinum myndhluta neðar en á 3. þrepi og í sumum myndhlutum var hún færð upp á 4. þrep. Kennarinn lét nemendur vinna í pörum og sagði þeim gjarnan að útskýra hvor fyrir öðrum. Í aðstoð kennara við nemendur var spurningum nemenda nánast aldrei svarað beint með því hvað þeir „ættu að gera“, heldur svaraði kennarinn spurningum þeirra með eigin spurningum til að hvetja þá til hugsunar. Eftirfarandi samræða milli kennara og nemanda var þáttur í rökstuðningi fyrir hækkun vitsmunalegrar áskorunar á 4. þrep. Viðfangsefni nemandans var að finna mælikvarða á mynd sem sýndi skordýr sem var 9 cm á myndinni en var 1,5 cm á lengd í raun (TAG: Flokkur 2):

- Nemandi: Hérna, ég gerði níu cm deilt með einum og hálfum. Það er þá sex, er það þá einn og hálfur á móti sex?
- Kennari: Já, sko, hún er einn og hálfur á lengd í raunveruleikanum, en hún er teiknuð upp sem [Nemandi: níu cm] níu, þannig að það er einn og hálfur á móti ...
- Nemandi: Hverjum níu.
- Kennari: Já.
- Nemandi: Er það þá mælikvarðinn?
- Kennari: Já, svo geturðu minnkað ef þú getur niður í einn. Einn á móti hvað?
- Nemandi: Ha?
- Kennari: Til að sýna, ef það er einn og hálfur á móti níu, hvað er það þá einn á móti? Þannig að einn cm þýðir hvað margir cm á myndinni?
- Nemandi: Uuu ...
- Kennari: Hvað þarftu að deila með einum og hálfum til þess að fá einn?
- Nemandi: Uuu, núll koma sjötíu og ...

- Kennari: Nei, hvað er fjórir deilt með fjórum?  
 Nemandi: Fjórir deilt með fjórum? Það er einn.  
 Kennari: Já, með hverju þarf ...  
 Nemandi: Jááá, það er þá einn komma fimm.  
 Kennari: Já, akkúrat.

Nemandinn komst í kjölfarið að rétttri niðurstöðu. Kennarinn gaf nemandanum tækifæri til þess að finna svarið á eigin spýtur með því að leiða hann áfram með spurningum og láta hann tengja við aðra niðurstöðu sem hann þekkti lausnina á. Í slíkum aðstæðum var tilhneiging margra kennara að segja nemandanum beint út með hverju hann ætti að deila eða segja jafnvel svarið. Með því að ýta undir greinandi hugsun nemenda á þennan hátt var aukið á vitsmunalega áskorun og byggt undir hugtakaskilning þeirra.

## UMRÆÐA

Af niðurstöðum rannsóknarinnar má draga þá ályktun að auka megi gæði vitsmunalegrar áskorunar í stærðfræðikennslu á Íslandi. Algengasta kennsluaðferð í kennslustundum í stærðfræði var einstaklingsvinna nemenda þar sem þeir unnu einir og ekki að sömu viðfangsefnum á sama tíma og aðrir nemendur. Það er í samræmi við niðurstöður fyrri rannsókna sem sýndu að einstaklingsvinna nemenda í námsbókum einkenndi stærðfræðikennslu á Íslandi (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014; Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, 2015; Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson, 2012). Með slíkum kennsluaðferðum er erfitt að vinna að stærðfræðiviðfangsefnum sem fela í sér greinandi hugsun og lítið rými er fyrir samvinnu eða samtal. Mjög algengt var að sjá kennslu drifna áfram af áætlunum með dæmanúmerum úr námsbókum. Þar virtust það frekar vera dæmanúmerin sem stýrðu vinnu nemenda en tiltekin námsmarkmið. Í þeim skóla þar sem vitsmunaleg áskorun var mest vísaði kennarinn í slíka áætlun en lét hana ekki stýra kennslunni. Greinilegt var að sá kennari skipulagði kennslustundir með sértækari námsmarkmið að leiðarljósi en að fara einungis yfir tiltekin dæmi af áætlun. Betri tækifæri til samræðna urðu til í þeim kennslustundum en öðrum og þar unnu nemendur saman í þörum að sömu viðfangsefnum. Það varð til þess að nemendur útskýrðu hugsun sína hver fyrir öðrum og vitsmunaleg áskorun jókst. Þegar nemendur vinna samtímis að sömu viðfangsefnum virðist sem ríkari tækifæri skapist til vitsmunalegrar áskorunar á háu stigi. Með samtali við kennara og samnemendur um viðfangsefnin þróa nemendur með sér færni í rökhugsun og djúpan skilning á stærðfræði. Niðurstöður sýndu að þar sem nemendur unnu eftir áætlun á ólíkum stöðum í námsefninu og mörg viðfangsefni komu við sögu í hverri kennslustund var vitsmunaleg áskorun almennt lítil.

Vissa samsvörun mátti sjá á milli áskorunar sem birtist í viðfangsefnum og þeirrar áskorunar sem birtist í kennslustundum, þó það hafi ekki alltaf haldist í hendur. Engin viðfangsefni flokkuðust í TAG-flokk 1 þar sem eingöngu á að leggja á minnið. Það bendir til þess að á unglingsstigi grunnskóla sé áherslan ekki á að nemendur leggi reikniaðferðir eða aðrar upplýsingar beinlínis á minnið, heldur frekar að þeir beiti reikniaðferðum úr sýnidæmum eða fari eftir leiðbeiningum kennara um hvernig eigi að leysa dæmin. Í TAG er viðfangsefni í flokki 2 ef fyrir er sýnidæmi sem sýnir skýrt hvernig eigi að leysa



verkefnið, eins og oft má sjá í íslenskum námsbókum. Í PLATO teljast það vísbendingar um greinandi hugsun að leysa slík dæmi þrátt fyrir sýnidæmin og er myndhluti á 3. þrepi ef bæði meirihluti hans inniheldur slíka virkni og kennari viðheldur kröfum um greinandi hugsun nemenda.

Niðurstöður gáfu einnig til kynna að kennarar hefðu tilhneigingu til að draga úr vitsmunalegri áskorun viðfangsefna með því að spyrja eingöngu lokaðra spurninga, gefa nemendum ekki tækifæri til að reyna sjálfir eða hreinlega segja þeim lausnina. Í mörgum tilfellum var þá ekkert eftir fyrir nemendur að gera annað en að slá inn í reiknivél það sem kennarinn sagði eða skrifa niður svárið. Niðurstöður benda því til þess að vandasamt sé fyrir kennara að viðhalda kröfum um rökhugsun og þeirri áskorun sem felst í viðfangsefnum. Það er í samræmi við fyrri niðurstöður rannsókna sem sýna að kennara skorti faglegan stuðning til að geta viðhaldið kröfum (Norton og Kastberg, 2012; Tekkumru-Kisa o.fl., 2020; Wilhelm, 2014).

Skólamenning og heildarskipulag stærðfræðikennslu gegnir veigamiklu hlutverki í þessu samhengi. Nemendur á unglingastigi sem hafa vanist þeirri hugmynd frá upphafi skólagöngu að stærðfræði sé fag þar sem unnið er í samvinnu við aðra ekki síður en einstaklingslega eiga eflaust auðveldara með að viðhafa hópinnubrögð í stærðfræði. Samfella í stærðfræðinámi og samvinna stærðfræðikennara þvert á skólastig getur stutt þróun stærðfræðikennslu í átt að meiri samvinnu nemenda að sömu viðfangsefnum. Á móti má nefna nemendur sem ef til vill telja það henta sér ágætlega að vinna einir. Bráðgerir grunnskólanemendur eru til dæmis gjarnan í þeirri stöðu að vinna mest einir í stærðfræðitímum og spyrja má hversu vel slík tilhögun ræktar hæfileika þeirra og tækifæri til árangursríks náms. Í ljósi þess að hlutfall íslenskra nemenda sem ná hæstu þrepum stærðfræðihluta PISA fer minnkandi má telja víst að leggja þurfi mat á stöðu bráðgerra nemenda hérlendis (OECD, 2019). Velta má fyrir sér hvaða þýðingu niðurstöður þessarar rannsóknar hafa fyrir þennan hóp nemenda og hvernig betur má mæta þörfum þeirra fyrir vitsmunalega áskorun.

Vert er að nefna að þótt myndbandsgögn úr kennslustundum geti gefið lifandi mynd af kennsluháttum almennt þá geta slík gögn, ein og sér, veitt takmarkaðar upplýsingar um nám og athafnir nemenda, sérstaklega þegar um hljóðláta einstaklingsvinnu er að ræða. Þá er úrtak í myndbandsrannsóknum yfirleitt lítið vegna þess hversu mikinn tíma greining gagnanna tekur. Þessi atriði takmarka að vissu marki ályktanir sem hægt er að draga af niðurstöðum. Viðbótargögn geta gegnt lykilhlutverki við að skilja samhengi kennslustundanna við skipulag kennslunnar í víðari skilningi.

Athygli vekur að tvö viðfangsefnanna í TAG-flokki 4 komu fyrir í skólum þar sem vitsmunaleg áskorun í kennslustundunum fór hæst á 2. þrep í PLATO. Það sýnir að þótt viðfangsefnin hafi falið í sér mikla vitsmunalega áskorun þá viðhéldu kennararnir ekki áskoruninni í kennslustundinni. Í báðum skólum fengust nemendur við þessi viðfangsefni í einrúmi á meðan bekkjarfélagar þeirra voru á öðrum stað í bókinni að vinna í öðrum viðfangsefnum samkvæmt eigin áætlun. Aðeins tveir kennarar af tíu juku vitsmunalega áskorun með kennslufræðilegri nálgun sinni á viðfangsefnin og samskiptum við nemendur. Meirihluti hinna kennaranna dró úr vitsmunalegri áskorun á einhverjum tímavörðum og flestir ítrekað.

## Lokaorð

Þó telja megi ljóst að tækifæri séu til að bæta stærðfræðikennslu á Íslandi, og þá sérstaklega að skapa tækifæri fyrir nemendur til að beita greinandi og skapandi hugsun, þá ber að fara varlega í að draga ályktanir um þá kennara og skóla sem tóku þátt í rannsókninni. Þrátt fyrir að faglegar kröfur væru á mismunandi stigi í skólunum er ekki endilega hægt að fullyrða að kennarar sem viðhéldu eða gerðu mestar kröfur um hugsun séu „betri kennarar“ en þeir kennarar sem drógu úr henni. Kennsla þeirra fyrrnefndu var vissulega betri í þessum afmarkaða þætti, en önnur gæðaviðmið, svo sem agastjórnun, tímastjórnun og endurgjöf, voru ekki til umfjöllunar.

Til þess að stuðla megi sem best að vitsmunalegri áskorun á háu stigi í stærðfræðikennslu á Íslandi þarf að auka áherslu á vægi merkingarbærra viðfangsefna sem nemendur vinna allir að á sama tíma með áherslu á samræðu, útskýringar á eigin hugsun og rökstuðning. Að sama skapi mætti draga verulega úr stærðfræðikennslu þar sem eingöngu er byggt á áætlunum með dæmanúmerum úr kennslubókum. Þegar nemendur vinna saman að vel ígrunduðum viðfangsefnum verður markmið hverrar kennslustundar skýrara en þegar þeir vinna á ólíkum stöðum í námsbókum. Vinna má að slíkum kennsluháttum í ríkari mæli með starfsþróunarverkefnum sem auka fagþekkingu á þessu sviði en það er lyklatríði í að viðhalda vitsmunalegri áskorun (Tekkumru-Kisa o.fl., 2020; Wilhelm, 2014). Ekki er þó dregið í efa að nemendur hafi gagn af reglulegum dæmatímum þar sem þeir vinna sjálfstætt til að öðlast færni í að beita ýmsum reikniaðferðum, til dæmis við að leysa jöfnur og einfalda stæður. Engu að síður er nauðsynlegt að sérstaklega sé unnið að hugtakaskilningi samhliða því. Niðurstöður þessarar rannsóknar og fyrri rannsókna á stærðfræðikennslu á Íslandi benda til þess að mikið vægi slíkra dæmatíma sé á kostnað greinandi hugsunar, vitsmunalegrar áskorunar og samræðna í skólaföllum.

## ATHUGASEMD

Rannsóknin var styrkt af Rannsóknasjóði Rannís, styrknúmer 206756-051.

## HEIMILDIR

- Anna Helga Jónsdóttir, Eggert Briem, Freyja Hreinsdóttir, Freyr Þórarinnsson, Jón Ingólfur Magnússon og Rögnvaldur G. Möller. (2014). *Úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum*. Reykjavík: Mennta- og menningarmálaráðuneytið.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., ... Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180. <https://doi.org/10.3102/0002831209345157>
- Bell, C. A., Dobbelaer, M. J., Klette, K. og Visscher, A. (2019). Qualities of classroom observation systems. *School Effectiveness and School Improvement*, 30(1), 3–29. <https://doi.org/10.1080/09243453.2018.1539014>

- Cochran-Smith, M. og Villegas, A. M. (2015). Framing teacher preparation research: An overview of the field, part 1. *Journal of Teacher Education*, 66(1), 7–20. <https://doi.org/10.1177/0022487114549072>
- Croninger, R. G., Valli, L. og Chambliss, M. J. (2012). Researching quality in teaching: Enduring and emerging challenges. *Teachers College Record*, 114(4), 1–15.
- Ding, C. og Sherman, H. (2006). Teaching effectiveness and student achievement: Examining the relationship. *Educational Research Quarterly*, 29(4), 39–49.
- Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research*, 53(2), 159–199. <https://doi.org/10.3102/00346543053002159>
- Grossman, P. (2019). *PLATO 5.0: Training and observation protocol*. Stanford: Center to Support Excellence in Teaching.
- Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir. (2015). Instructional practices in mathematics classrooms. Í K. Krainer og N. Vondrová (ritstjórar), *Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (bls. 3036–3042). Prag: Charles University, Faculty of Education.
- Hanushek, E. A., Piopiunik, M., og Wiederhold, S. (2018). The value of smarter teachers: International evidence on teacher cognitive skills and student performance. *Journal of Human Resources*, 54(4), 857–899. <https://www.doi.org/10.3368/jhr.55.1.0317.8619R1>
- Ingvar Sigurgeirsson, Amalía Björnsdóttir, Gunnhildur Óskarsdóttir og Kristín Jónsdóttir. (2014). Kennsluhættir. Í Gerður G. Óskarsdóttir (ritstjóri), *Starfshættir í grunnskólum við upphaf 21. aldar* (bls. 113–158). Reykjavík: Háskólaútgáfan.
- Jóhann Örn Sigurjónsson. (2014). *Vitsmunalegar kröfur námsefnis í upprifjunar-áföngum framhaldsskóla í stærðfræði: Greining á stærðfræðilegum viðfangsefnum í námsefni upprifjunaráfanga* (óúttefin bakkaláritgerð). Sótt af <http://hdl.handle.net/1946/19010>
- Jóhann Örn Sigurjónsson og Jónína Vala Kristinsdóttir. (2018). Upprifjunaráfangar framhaldsskóla í stærðfræði: Skapandi og krefjandi vinna eða stagl? *Tímarit um uppeldi og menntun*, 27(1), 65–86. <https://doi.org/10.24270/tuum.2018.27.4>
- Klette, K., Blikstad-Balas, M. og Roe, A. (2017). Linking instruction and student achievement. A research design for a new generation of classroom studies. *Acta Didactica Norge*, 11(3), 1–19. <https://doi.org/10.5617/adno.4729>
- Mennta- og menningarmálaráðuneytið. (2013). *Aðalnámskrá grunnskóla: Almennur hluti 2011: Greinasvið 2013*. Reykjavík: Höfundur.
- Norton, A. og Kastberg, S. (2012). Learning to pose cognitively demanding tasks through letter writing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 109–130. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9193-9>
- OECD. (2019). *PISA 2018 results: Combined executive summaries*. Sótt af [https://www.oecd.org/pisa/Combined\\_Executive\\_Summaries\\_PISA\\_2018.pdf](https://www.oecd.org/pisa/Combined_Executive_Summaries_PISA_2018.pdf)
- Otten, S., Webel, C. og de Araujo, Z. (2017). Inspecting the foundations of claims about cognitive demand and student learning: A citation analysis of Stein and Lane (1996). *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(1), 111–120. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.12.008>

- Pehkonen, L., Hemmi, K., Krzywacki, H. og Laine, A. (2018). A cross-cultural study of teachers' relation to curriculum materials. Í E. Norén, H. Palmér og A. Cooke (ritstjórar), *The eighth Nordic conference on mathematics education* (bls. 309–318). Stokkhólmur: Swedish Society for Research in Mathematics Education. Sótt af <http://hdl.handle.net/10138/248079>
- Praetorius, A.-K. og Charalambous, C. Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: Looking back and looking forward. *ZDM: Mathematics Education*, 50(3), 535–553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>
- Russo, J. og Hopkins, S. (2017). Student reflections on learning with challenging tasks: 'I think the worksheets were just for practice, and the challenges were for maths.' *Mathematics Education Research Journal*, 29(3), 283–311. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0197-3>
- Savola, L. (2010). Comparison of the classroom practices of Finnish and Icelandic mathematics teachers. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 1(2), 7–13.
- Stein, M. K. og Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. og Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* (2. útgáfa). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tekumru-Kisa, M., Stein, M. K. og Doyle, W. (2020). Theory and research on tasks revisited: Task as a context for students' thinking in the era of ambitious reforms in mathematics and science. *Educational Researcher*, 49(8), 606–617. <https://doi.org/10.3102/0013189X20932480>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Wilhelm, A. G. (2014). Mathematics teachers' enactment of cognitively demanding tasks: Investigating links to teachers' knowledge and conceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(5), 636–674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.5.0636>
- Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson. (2012). *Úttekt á stærðfræðikennslu á unglíngastigi grunnskóla*. Reykjavík: Mennta- og menningarmálaráðuneytið.

Greinin barst tímaritinu 28. júlí 2020 og var samþykkt til birtingar 30. nóvember 2020

## UM HÖFUNDANA

Jóhann Örn Sigurjónsson (johannorn@hi.is) er doktorsnemi á sviði stærðfræðimenntunar við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hann er kennari og tölvunarfræðingur og hefur starfað bæði sem grunnskólakennari og stundakennari við Háskóla Íslands. Hann stundaði alþjóðlegt meistaranám í menntarannsóknum við Háskólann í Gautaborg sem hluta af kennaranámi sínu. Rannsóknaráhugi hans snýr að stærðfræðinámi, námsefni og þróun stærðfræðikennslu.

Berglind Gísladóttir (berglingd@hi.is) er lektor við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún lauk B.Ed.-gráðu frá Kennaraháskóla Íslands 2002, M.Ed.-gráðu í stærðfræðimenntun frá Háskólanum í Reykjavík árið 2007 og doktorsprófi í stærðfræðimenntun frá Columbia-háskóla í New York árið 2013. Rannsóknaráhugi Berglindar beinist að námslegum og félagslegum þáttum sem hafa áhrif á námsárangur nemenda. Einnig beinist áhuginn að fagþekkingu kennara og þróun skólastarfs.

# Intellectual challenge in mathematics teaching in lower secondary schools

## ABSTRACT

The aim of this study was to assess the level of intellectual challenge offered to students in lower secondary mathematics in Iceland as it appears in mathematical tasks and in the enactment of tasks in the classroom. The national curriculum explicitly states that students should learn to explain their thoughts to others and engage with mathematical tasks in which both critical and analytical thinking is required (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2012 (Ministry of Education, Science and Culture). Previous research has shown that teachers generally have a positive view towards cognitively demanding tasks, but such tasks are scarce in Icelandic textbooks (Jóhann Örn Sigurjónsson & Jónína Vala Kristinsdóttir, 2018). How teachers enact tasks in the classroom with the aim of developing students' competency in critical and creative thinking has not been the object of much study in Iceland.

Ten Icelandic lower secondary schools participated in the study. Schools were purposefully chosen with the aim of establishing heterogeneity of the sample and included different school types in terms of location, size, and students' background. Three to four consecutive mathematics lessons were video recorded in 8th grade in each school, in total 34 lessons. Two frameworks were used to analyse the data. The Protocol for Language Arts Teaching Observations (PLATO) was used to analyse the level of intellectual challenge offered to students in the classroom on a 4-point scale in 15 minute segments (Bell et al., 2019; Grossman, 2019). The Task Analysis Guide (TAG), was used to analyse whether the solution of mathematical tasks required analytical thinking (Stein et al., 2009).

For the study 144 mathematical tasks were analysed. The tasks were identified from both the videos and lesson plans. Findings showed that the majority of tasks involved procedures without connections to underlying mathematical concepts, or 64%. The tasks that involved procedures with connections counted 33% and only four tasks were in the highest category and involved doing mathematics or 3%. No tasks were in category 1 that involves only memorization.

In a majority of segments, or 63%, intellectual challenge was at the 2-level which indicates limited evidence of intellectually challenging activities. A common reason for segments scoring at the 2-level was that teachers reduced the challenge of activities in their assistance to students. Teachers commonly told students exactly how to solve tasks and, in some cases, told them the answers. About 20% of segments scored at the 3 or 4-level, which require teachers to provide activities that to some extent prompt high level analytic and inferential thinking. Only in two schools did the intellectual challenge of activities reach the 4-level in some segments. In those cases, teachers advanced the intellectual challenge by asking students questions where explanation and reasoning was emphasized to develop conceptual understanding.

The results show that mathematics teaching in Iceland focuses mostly on tasks where procedures for how to solve the tasks are either fully explained by the teacher or by examples in the learning materials. In lessons where intellectual challenge was found to be at a high-level, students worked in pairs and the whole class was working on the same tasks, giving room for mathematical discussions among students. However, in a large portion of the observed lessons, students worked individually on a variety of different tasks at their own pace with limited interactions with other students.

The findings of this study indicate that there are opportunities to improve intellectual challenge in mathematics teaching in Icelandic classrooms by organizing lessons with specific tasks or learning goals in mind. Such a lesson structure seems to create richer opportunities for student reasoning and explanations. Lessons where the goal is to develop procedural fluency, for example in solving equations and simplifying expressions, may be of some benefit to students but it is imperative to place emphasis on conceptual understanding. The results of this study and previous studies on mathematics teaching in Iceland show that too much time is devoted to procedural lessons at the cost of critical thinking, intellectual challenge and classroom discourse.

Keywords: mathematics education, intellectual challenge, teaching quality, video-based studies, analytical thinking

## ABOUT THE AUTHORS

Johann Örn Sigurjónsson (johannorn@hi.is) is a doctoral graduate student in mathematics education at the University of Iceland, School of Education. He is a teacher and computer scientist and has worked both as a lower secondary school teacher and assistant teacher at the University of Iceland. He took part in an International Master's Programme in Educational Research at the University of Gothenburg as part of his teacher education. His research interests are mathematics learning, learning materials and the development of mathematics teaching

Berglind Gísladóttir (berglingd@hi.is) is an assistant professor at the Faculty of Subject Teacher Education at the School of Education, University of Iceland. She completed a B.Ed. degree from the Iceland University of Education in 2002, an M.Ed. degree in mathematics education from Reykjavík University in 2007 and a Ph.D. degree in mathematics education from Columbia University in New York in 2013. Her main research interests are educational and social factors that affect student achievement.